Donum auctoris.

STATICES ELEMENTA.

AUCTORE

FRIDERICO THEODORO POSELGER.

BEROLINI
APUD T. J. C. F. ENSLIN.
1818.

PRAEFATIO.

Quae in hoc opusculo explicantur *Elementa*, tum ab aliis ejusdem generis commentationibus eo differre volui, quod *Statices* lineae hic tantum primae indigitantur, omissis, quae in omnibus hujus disciplinae compendiis de illorum ad physicam, aut ad machinas construendas applicatione doceri solent; tum eo, quod notiones et theoremata singula non ex aliis alia deducuntur principiis, sed ex eodem promanant omnia: sicuti decet formam dignitatemque *scientiae*, qualem haec sibi inprimis vindicare videtur. Lege scilicet illa propositionum singularium fundamentum commune latissime patebit; easque methodus explanandi simplicissima et uniformis viam stratam aperiet ad inveniendas quorumvis hujus generis problematum solutiones. Equidem opere elegantissimo: *mecanique analytique*, incitatus atque de nascituro e strenue observata ista regula persua-

sus fructu, artis indolem hac commentatione brevissimis circumscribere, et accepta ab aliis proprio studio aucta redhibere intendens, ut ea neque ingrata sint lectori, neque prorsus inutilia rei literariae, opto.

CAPUT I.

INTRODUCTIO.

1. *Systema mechanicum* nexum dico punctorum physicorum ita inter se cohaerentium ut moto uno reliqua omnia moveantur.

2. *Liberum* vocatur systema cujus quodvis punctum secundum quamlibet directionem progredi valet: quodsi, ne fiat, adfuerit obstaculum, systema erit *non liberum* sive *conditioni adstrictum*.

3. Systematis *figura* a rectis quibus punctorum ejus quodque a quoque distat lineis pendet, eritque vel *immutabilis*, vel *mutationi obnoxia*, prout illae quantitates esse praesumuntur aut constantes aut variabiles.

4. *Locum* puncti cujusdam *absolutum* determinant ejus distantiae a tribus planis ad angulos rectos se invicem secantibus ejusque versus horum latera situs. Distantias, quae et *coordinatae* verbo usitato appellantur, litteris x, y, z, generatim indicabimus, quibus virgulas, instar x', y', z'; x'', y'', z''; et sic deinceps apponemus, quoties praesertim de dato quodam puncto locuti erimus. Plana tria illa ubivis construenda *coordinatorum* aeque sibi vindicant nomen, et in uno puncto concurrunt, quod *coordinatarum originem* praedicamus, si-

quidem incipiendo ab illo distantias dictas computabimus. Illorum autem tres intersectiones axes nuncupamus, et quidem generatim erit axis x, axis y, axis z, quae distantiis x, y, z fuerit parallela. A quibus ipsis plana nanciscuntur nomina planorum (xy), (xz), (yz), quatenus per binos axes x et y, vel x et z, vel y et z, definiuntur. Unde statim apparet, axem x esse perpendicularem plano (yz), itemque axem y plano (xz) et axem z plano (xy).

5. Quicquid puncti mobilis locum mutare valet absolutum, *Vis* dicitur. Et quidem ex ejus intensione et extensione, quantitas ejus aestimatur eodem modo ac numeri cujuscunque quantitas ex unitate et ex unitatum quae illum componunt copia. Vis igitur in calculum sicut numerus introducitur. Sic eam designabimus generatim littera P, quam casu dato distinguemus uti dictum est (4).

7. *Axioma:* Viribus in idem punctum mobile, M, conspirantibus, earum summa erit summa numerorum eis aequalium, quando omnibus eadem directio: abibit autem summa in differentiam, quando in directionibus agunt sibi invicem contrarie oppositis.

8. Motus quantitas sive *momentum* e quantitate vis agentis et magnitudine spatii per quod punctum mobile vis illa pellit in tempore dato, aestimatur. Si igitur punctum M, a vi $= P$, in dato tempore, per spatium $= s$, propulsum fuerit: erit momentum motus $= Ps$.

9. Momentum motus systematis mechanici totius ex omnibus ejus punctorum momentis aggregatis efficitur. Quod si evanescit, aliis viribus aliis contrarie oppositis (7) nec motus systematis inde oriri poterit, quem illius statum *quietem* vulgo appellant, quamquam non deficiunt vires, sed *aequipondium* sibi invicem tenent.

10. *Statices* est scientiae, in eas inquirere systematis conditiones, quibus datis, virium, quae puncta mobilia sollicitant, effectus in toto evanescunt, ita ut summa omnium momentorum particularium sit $= o$.

11. Motum quemlibet in statica non nisi in ipso temporis quo ille evanescit puncto consideramus, omnes igitur motus in systemate mechanico, eodem tempore, infinite scilicet parvo, peragi praesumuntur. Ideoque et per quae fit motus talis spatia, ut infinite parva, quamquam inter se diversa, cogitari possunt. Tempus igitur, ubique idem, in computum non venit, neque ergo celeritas. Punctum vero, quia tantum in linea, quae sit curva cujusvis ordinis, procedere potest, in tempore infinite parvo differentiale percurret lineae rectae, quae curvam illam in loco, ubi punctum a vi quadam sollicitatur, tangat. Atqui sit M punctum mobile; p linea recta tangens; P vis aliqua in linea p ubicunque sita, punctum M movere tendens: Pdp erit momentum motus staticum (8).

12. Linea recta p viam demonstrat puncti mobilis a vi quadam ad locum mutandum incitati, quae si punctum propellit vis, lineam p augmentari, si attrahit, deminui magnitudine differentiali dp manifestum est. In hujus quidem tractatus tenore dp semper ut augmentans vel positivum supponetur nisi contrarium diserte indixerimus.

13. Longitudo et situs lineae rectae p a locis quibus haec interjacet pendet vis sollicitantis atque puncti sollicitati. Prior locus ad arbitrium eligitur, electus pro constante habetur; posterior a systematis figura est datus atque variabilis. Illius coordinatae constantes, sint: a, b, c; hujus variabiles: x, y, z, (4).

Facile est videre, quod sit generatim

$$p^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots [1].$$

Ex quo prodit

$$1 = \frac{x-a}{p} \cdot \frac{x-a}{p} + \frac{y-b}{p} \cdot \frac{y-b}{p} + \frac{z-c}{p} \cdot \frac{z-c}{p} \ldots [2].$$

14. Notetur per (p,x), (p,y), (p,z) angulus comprehensus inter rectam p et coordinatarum aliquam x, y aut z: patet esse

$\frac{x-a}{p}=\cos(p,x)$; $\frac{y-b}{p}=\cos(p,y)$; $\frac{z-c}{p}=\cos(p,z)$; quibus valoribus in formula [2] substitutis; fiet

$$1=\cos^2(p,x)+\cos^2(p,y)+\cos^2(p,z)\ldots\ldots\ldots[3]$$

$$\text{et } p=x\cos(p,x)+y\cos(p,y)+z\cos(p,z)$$
$$-[a\cos(p,x)+b\cos(p,y)+c\cos(p,z)]\ldots\ldots[4].$$

15. In casu, quo linea p per originem transit coordinatarum, locum vis sollicitantis semper in istam originem ferre licebit, quo facto evanescent coordinatae a, b, c, et ex formula [4] prodibit ea:

$$p=x\cos(p,x)+y\cos(p,y)+z\cos(p,z)\ldots\ldots[5].$$

Ad instar rectae p fingantur duae separatim datae p', p'' in origine coordinatarum concurrentes, quarum coordinatae constantes a', b', c'; a'', b'', c''; evanescant, coordinatae autem variabiles sint x', y', z'; x'', y'', z'' (13), aequatio [5] pro eis has formulas dabit:

$$\left.\begin{array}{l} p'=x'\cos(p',x')+y'\cos(p',y')+z'\cos(p',z') \\ p''=x''\cos(p'',x'')+y''\cos(p'',y'')+z''\cos(p'',z'') \end{array}\right\}\ldots[6].$$

Linea, qua illae a se invicem distant in punctis mobilibus, recta sit $=d$: tum perspicitur esse

$$d^2=(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2\ldots\ldots[7].$$

Designemus autem per (p',p'') angulum inter illas p', p'' comprehensum: erit secundum trigonometriam planam

$$d^2=p'^2+p''^2\pm 2p'p''\cos(p',p'')\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[8].$$

Formula [7] evoluta fit

$$d^2=x'^2+y'^2+z'^2+x''^2+y''^2+z''^2-2(x'x''+y'y''+z'z'')\ldots[9].$$

Formula generalis [1], positis a, b, $c=o$, mutatur in has particulares:

$$\left.\begin{array}{l} p'^2=x'^2+y'^2+z'^2 \\ p''^2=x''^2+y''^2+z''^2 \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[10].$$

Tum hisce valoribus in aequat. [9] substitutis, eaque cum [8] comparata, provenit

$$\pm p' p'' \cos(p', p'') = -(x' x'' + y' y'' + z' z'') \ldots\ldots [11]$$

et, si angulum (p', p'') acutum esse supponimus,

$$p' p'' \cos(p', p'') = x' x'' + y' y'' + z' z'' \ldots\ldots\ldots\ldots [12]$$

$$\text{sive } \cos(p', p'') = \frac{x'}{p'} \cdot \frac{x''}{p''} + \frac{y'}{p'} \cdot \frac{y''}{p''} + \frac{z'}{p'} \cdot \frac{z''}{p''} \ldots\ldots\ldots [13].$$

Quia vero $\frac{x'}{p'} = \cos(p', x)$; $\frac{y'}{p'} = \cos(p', y)$; $\frac{z'}{p'} = \cos(p', z)$, quod simili modo ad alteram quoque lineam p'' extendi potest; erit quoque

$$\cos(p', p'') = \cos(p', x)\cos(p'', x) + \cos(p', y)\cos(p'', y) + \cos(p', z)\cos(p'', z) \ldots [14].$$

17. Aequatio [13] et hanc formam facile induit:

$$\cos(p', p'') = \frac{x' x''}{p' p''}\left(1 + \frac{y' y''}{x' x''} + \frac{z' z''}{x' x''}\right) \ldots\ldots [15].$$

Projectis autem lineis p', p'', in planum (xy), erunt aperte $\frac{y'}{x'}$; $\frac{y''}{x''}$ tangentes angulorum quos projectiones istae cum axe x faciunt. Simili modo $\frac{z'}{x'}$; $\frac{z''}{x''}$ inveniuntur tangentes angulorum quos lineae p', p'', in planum (xz) projectae cum axe x comprehendunt. Positis $\frac{y'}{x'} = a'$, $\frac{y''}{x''} = a''$, $\frac{z'}{x'} = b'$, $\frac{z''}{x''} = b''$ atque substitutis in formula [15], haec mutatur in:

$$\cos(p', p'') = \frac{x'}{p'} \cdot \frac{x''}{p''}(1 + a' a'' + b' b'') \ldots\ldots\ldots [16].$$

Eodem modo formulae [10] mutantur in:

$$p'^2 = x'^2 (1 + a'^2 + b'^2)$$

$$p''^2 = x''^2 (1 + a''^2 + b''^2)$$

quas substituendo in formula [16], tandem emanabit nota illa

$$\cos(p' p'') = \frac{1 + a' a'' + b' b''}{\sqrt{(1 + a'^2 + b'^2)}\sqrt{(1 + a''^2 + b''^2)}} \ldots [17].$$

18. Ex aequatione [14] haec alia statim nascitur

$$\cos(p'p'') = \frac{x''}{p''}\cos(p',x) + \frac{y''}{p''}\cos(p',y) + \frac{z''}{p''}\cos(p',z) \ldots . [18]$$

unde denuo venit

$$p''\cos(p',p'') = x''\cos(p',x) + y''\cos(p',y) + z''\cos(p',z) \ldots . [19].$$

Tum si $(p'',p') =$ recto, erit

$$o = x''\cos(p',x) + y''\cos(p',y) + z''\cos(p',z) \ldots . [20].$$

Quae autem, ut ejus deductio ipsa demonstrat, generalis est aequatio duarum rectarum altera ab altera ad rectos intersectarum angulos, quarum altera data est positione, locus autem alterius est planum, cui illa ad rectos insistit angulos, et quod per originem transgreditur coordinatarum. Patet, ipsum hoc planum positione esse datum, cum coordinatis planis datos faciens angulos, qui vero, ut geometria docet, iidem erunt ac anguli quos lineae rectae in plani dati et coordinatorum cujusque intersectione concurrentes atque his ipsis planis, altera alteri perpendiculares inter se comprehendunt.

Atqui linea p' in origine coordinatarum concurrit cum axibus x, y, z, qui perpendiculares sunt planis (yz), (xz), (xy), (4). Ideoque (p',x), (p',y), (p',z) erunt anguli quos planum cui p' ad rectos insistit angulos facit cum planis coordinatis (yz), (xz), (xy).

19. Quia vero linea p' positione est data, erunt $\cos(p',x)$, $\cos(p',y)$, $\cos(p',z)$ quantitates constantes, summa autem earum quadratorum erit $= 1$, [3]. Data itaque aequatione algebraica generali hujus formae

$$o = Ax + By + Cz \ldots\ldots\ldots\ldots [21],$$

cujus terminorum coefficientes A, B, C, sint quantitates constantes, mutari poterit eadem in hanc

$$o = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} \cdot y + \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} \cdot z \ldots [22]$$

et sub hac forma semper aequiparari aequationi [20], ita ut planum

construi liceat aequationi [21] satisfaciens et cum planis coordinatis angulos comprehendens, quorum cosinus sint $= \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$; $\frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$; $\frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$. Quod quidem per coordinatarum originem transire supponitur planum; qua translata: x, y, z, fient $x+a$, $y+b$, $z+c$, atque aequatio [21] fiet

$$o = Ax+By+Cz+D \ldots\ldots\ldots\ldots [23]$$

posito $D = Aa+Bb+Cc$.

20. Sit igitur planum per aequationem generalem [23] datum, quod tangat superficiem quamcunque curvam in puncto aliquo cujus coordinatae sint: x, y, z. Manifestum est, elementum differentiale plani tangentis necessarie confundi cum elemento superficiei curvae in eodem puncto. Differentiale autem illius plani ex aequat. [23] eruitur:

$$o = Adx+Bdy+Cdz \ldots\ldots\ldots [24]:$$

haec ergo aperte erit aequatio generalis differentialis, superficiei curvae cujuslibet, ad punctum relata, cujus coordinatae sunt: x, y, z.

21. Quia p, ut quantitas arithmetica considerata, functio est variabilium: x, y, z : e principiis calculi differentialis sequitur:

$$dp = \left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{dp}{dy}\right) dy + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz \ldots\ldots\ldots [25];$$

si igitur formulam generalem [1] secundum x, y, z, variare feceris, et differentialia inde eruta dp per dx, dy, dz, diviseris, prodibit

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{x-a}{p} = \cos(p,x)$$

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \frac{y-b}{p} = \cos(p,y)$$

$$\left(\frac{dp}{dz}\right) = \frac{z-b}{p} = \cos(p,z):$$

sic aequatio [25] mutabitur in:

$$dp = \cos(p,x)dx+\cos(p,y)dy+\cos(p,z)dz \ldots\ldots [26].$$

Supponamus autem, p esse lineam rectam perpendicularem plano cujus aequatio data sit

$$o = Ax + By + Cz + D:$$

erit secundum (19)

$$\cos(p,x) = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}};\ \cos(p,y) = \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}};\ \cos(p,z) = \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$$

$$\text{ergo } dp = \frac{Adx + Bdy + Cdz}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} \ldots\ldots\ldots\ldots [27].$$

Quae igitur est aequatio differentialis lineae rectae p, in puncto ad coordinatas x, y, z, relato ad angulos rectos insistentis superficiei curvae, cujus aequatio differentialis est $o = Adx + Bdy + Cdz$.

22. Sit $u = o$, aequatio primitiva exhibens superficiem cujuslibet figurae ad coordinatas variabiles x, y, z, relatam. Habemus tum per calculi differentialis principia:

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy + \left(\frac{du}{dz}\right)dz = o;$$

plani vero illam in puncto aliquo tangentis sit aequatio superius data $Ax + By + Cz + D = o$; cujus differentiale: $Adx + Bdy + Cdz = o$: quia vero hoc cum illo in eodem puncto confunditur, necessarie erit $A = \left(\frac{du}{dx}\right)$; $B = \left(\frac{du}{dy}\right)$; $C = \left(\frac{du}{dz}\right)$. Quibus autem valoribus in formula [27] substitutis, haec in illam maxime generalem mutatur:

$$dp = \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots [28]$$

cujus membro utroque per factorem λ indeterminatum multiplicato, provenit

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}\, dp = \lambda\, du \ldots\ldots\ldots\ldots [29].$$

23. Huc usque lineam p tantum ut functionem aliarum rectarum variabilium contemplati sumus: dependet autem et ab angulis quibusdam variationi itidem obnoxiis, quas nunc consideremus. Et ducantur quidem ex origine coordinatarum radii vectores R et r, ad punctum, cujus coordinatae: a, b, c, constantes et ad illud cujus sunt: x, y, z, variabiles, qui projiciantur in quodvis planorum trium coordinatorum, e. gr. in planum (xy). Sint ε et E anguli inter r et z, atque inter R et c comprehensi; sint poro φ et Φ anguli comprehensi inter dictas projectiones vectorum r, R, et axem x: in promptu erunt aequationes sequentes

$$\left.\begin{array}{ll} z = r\cos\varepsilon & c = R\cos E \\ y = r\sin\varepsilon\sin\varphi & b = R\sin E\sin\Phi \\ x = r\sin\varepsilon\cos\varphi & a = R\sin E\cos\Phi \end{array}\right\} \ldots\ldots [30].$$

Unde deducuntur

$$\left.\begin{array}{l} (x-a)^2 = r^2\sin\varepsilon^2\cos\varphi^2 + R^2\sin E^2\cos\Phi^2 - 2rR\sin\varepsilon\sin E\cos\varphi\cos\Phi \\ (y-b)^2 = r^2\sin\varepsilon^2\sin\varphi^2 + R^2\sin E^2\sin\Phi^2 - 2rR\sin\varepsilon\sin E\sin\varphi\sin\Phi \\ (z-c)^2 = r^2\cos\varepsilon^2 + R^2\cos E^2 - 2rR\cos\varepsilon\cos E \end{array}\right\} [31]$$

quibus valoribus in formula [1] substitutis mutatur in illam:

$$p^2 = r^2 + R^2 - 2rR(\cos\varepsilon\cos E + \sin\varepsilon\sin E\cos(\Phi - \varphi)) \ldots. [32].$$

Hinc autem apparet, quali ratione p sit functio anguli φ, quem si solum ut variabilem concipimus, dabit calculus differentialis

$$\left(\frac{dp}{d\varphi}\right) = -\frac{rR}{p}\sin\varepsilon\sin E\sin(\Phi - \varphi) \ldots\ldots [33].$$

Sit γ angulus a linea recta p et coordinata z comprehensus: erit $p\sin\gamma$ projectioni lineae p in plano (xy) aequalis. Facile autem perspicitur, projectiones: $r\sin\varepsilon$, $R\sin E$ atque $p\sin\gamma$, in plano (xy) triangulum continere cujus area $= \frac{r\sin\varepsilon\, R\sin E\sin(\Phi - \varphi)}{2}$ sive $= \frac{\pi p\sin\gamma}{2}$; π designante perpendiculum ex origine coordinatarum pro vertice trianguli sumta in projectionem $p\sin\gamma$ ut basin demissum.

Hinc aequatio [33] mutatur in

$$\left(\frac{dp}{d\varphi}\right) = -\pi \sin\gamma \;\ldots\ldots\ldots\ldots [34].$$

24. Quod modo (23) in respectu ad planum (xy) dictum est, nullo negotio et ad plana (xz), (yz) mutatis mutandis applicari potest. Tum si loco φ ponamus ψ, ω, pro $\left(\frac{dp}{d\varphi}\right) d\varphi$ accipiemus: $\left(\frac{dp}{d\psi}\right) d\psi$, $\left(\frac{dp}{d\omega}\right) d\omega$, ceteroquin formulas illis [30....34] analogas.

25. Si, quae inter differentialia: dx, dy, dz locum habet relatio, non nisi per solam aequationem

$$dp = \left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{dp}{dy}\right) dy + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz$$

data fuerit, palam est illa a se invicem plane non dependere, nullum igitur inter ea existere nexum, quo punctum mobile in libero motu quaquam versus impediatur. Liberum igitur erit systema mechanicum (2) si pro omnibus e quibus componitur punctis unica tantum illa data est aequatio. Quaevis autem conditio, qua relatio aliqua particularis differentialium dx, dy, dz, inter se invicem constituatur, ad formam generalem reduci poterit eam

$$o = A dx + B dy + C dz$$

in qua litterae A, B, C quantitates designent datas. Quodsi tres ejusmodi conditiones fuerint datae, eo quoque differentialia illa erunt determinata. Earum vero quaelibet impedimentum continebit datum, quo minus libere puncta systematis mobilia aut omnia aut quaedam moveri queant. Systema igitur non liberum (2) talium conditionum uni pluribusve erit adstrictum.

26. Aequatio illa differentialis $o = A dx + B dy + C dz$, cum sit primi ordinis, semper poterit integrari adhibito duntaxat multiplicatore. Itaque eam ut ex aequatione $u = o$ primitiva derivatam

contueri licet, aut, quod idem erit, ut aequationem differentialem superficiei curvae, cui ad quod illa pertinet punctum mobile inhaereat. Quia vero, secundum (25), tres ejusmodi datae conditiones differentialia dx, dy, dz, jam omnimodo determinant, nec plures, quibus systema sit adstrictum, generales dari possunt. Illis denique in computum rite ductis nihil obstabit quo minus systema non liberum aeque ac liberum ipsum tractes.

27. Sint M' M'' puncta quaecunque mobilia in systemate mechanico, quae a se invicem linea d distent, quorum autem coordinatae sint x', y', z'; x'', y'', z''. Habebimus

$$d^2 = (x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2.$$

Figura systematis, quando supponatur invariabilis (3), d erit constans, ideoque

$$o = (x''-x')(dx''-dx') + (y''-y')(dy''-dy') + (z''-z')(dz''-dz') \dots\dots [35],$$

cui aequationi, si liberum fuerit systema, (25) alio modo non poterit satis fieri quam ponendo quemque ejus terminum singularem $= o$, unde

$$dx' = dx''; \; dy' = dy''; \; dz' = dz'' \dots\dots\dots [36].$$

Ex aequatione [30] autem facile eruuntur valores

$$\begin{array}{ll} z' = r' \cos \varepsilon' & dz' = o \\ z'' = r'' \cos \varepsilon'' & dz'' = o \\ y' = r' \sin \varepsilon' \sin \varphi' & dy' = r' \sin \varepsilon' \cos \varphi' \, d\varphi' \\ y'' = r'' \sin \varepsilon'' \sin \varphi'' & dy'' = r'' \sin \varepsilon'' \cos \varphi'' \, d\varphi'' \\ x' = r' \sin \varepsilon' \cos \varphi' & dx' = -r' \sin \varepsilon' \sin \varphi' \, d\varphi' \\ x'' = r'' \sin \varepsilon'' \cos \varphi'' & dx'' = -r'' \sin \varepsilon'' \sin \varphi'' \, d\varphi'' \end{array}$$

quibus substitutis in formula [35], illa mutatur in eam:

$$\begin{aligned} o = & -r'^2 \sin \varepsilon'^2 \sin \varphi' \cos \varphi' \, d\varphi' + r' r'' \sin \varepsilon' \sin \varepsilon'' \sin \varphi'' \cos \varphi' \, d\varphi'' \\ & + r' r'' \sin \varepsilon' \sin \varepsilon'' \sin \varphi' \cos \varphi'' \, d\varphi' - r''^2 \sin \varepsilon''^2 \sin \varphi'' \cos \varphi'' \, d\varphi'' \\ & + r'^2 \sin \varepsilon'^2 \sin \varphi' \cos \varphi' \, d\varphi' - r' r'' \sin \varepsilon' \sin \varepsilon'' \sin \varphi' \cos \varphi'' \, d\varphi'' \\ & - r' r'' \sin \varepsilon' \sin \varepsilon'' \sin \varphi'' \cos \varphi' \, d\varphi' + r''^2 \sin \varepsilon''^2 \sin \varphi'' \cos \varphi'' \, d\varphi'' \end{aligned}$$

unde

$$o = \sin\varphi' \cos\varphi''(d\varphi' - d\varphi'') + \sin\varphi'' \cos\varphi'(d\varphi'' - d\varphi')$$

ideoque, pro angulis φ'', φ', quibuscunque, erit

$$d\varphi' = d\varphi''.$$

Inde manifesto colligitur, in systemate libero et figurae invariabilis, quod ex punctis mobilibus M', M'', M'''..... compositum sit, omnia differentialia dx, dy, dz, $d\varphi$, $d\psi$, $d\omega$ pro quovis puncto M, esse eadem. Si vero horum punctorum aliquod ut fixum supponatur, ita ut nusquam progredi queat, pro illo aperte erit dx, dy, $dz = o$, quod igitur idem valet pro omnibus reliquis; atque si circa axem z, vel y, vel x rotari non poterit, tum pro omnibus M erit aut $d\varphi$, aut $d\psi$, aut $d\omega = o$.

CAPUT II.

AEQUIPONDIUM.

28. *Aequipondium* in systemate mechanico adesse dicitur, quando puncta ejus mobilia M', M'', M'''..... per vires P', P'', P'''..... sollicitata, differentialia dp', dp'', dp'''..... rectarum p', p'', p'''..... percurrere tendant, nihiloque minus ob conditiones datas in quiete perseverent. In eo systematis statu erit aperte (10)

$$o = P'dp' + P''dp'' + P'''dp''' \text{............} [37].$$

Data vicissim hac aequatione fundamentali: aequipondium aderit.

29. Si quicunque, e quibus alterum aequationis [37] membrum componitur terminis, in alteram partem transferatur, ut sit e. gr.

$$P^{I}dp^{I} = -(P^{II}dp^{II} + P^{III}dp^{III} + \ldots\ldots) \ldots\ldots\ldots\ldots [38]$$

momentum $P^{I}dp^{I}$ negative sumtum apparet ut reliquorum omnium effectus totalis. Quo respectu P^{II}, $P^{III}\ldots\ldots$ *vires componentes*, P^{I} autem *vim compositam* nuncupaturi sumus. Et, quia signorum diversitas non nisi a directionibus virium sibimet oppositis oriri potest, vi quaque pro positiva accepta, liquet, vim compositam in aequipondio cum quavis alia existentem huic in linea recta agere contrariam, utriusque autem momenta sibi invicem esse aequalia.

30. Ope formulae [25] aequatio [37] in hanc aliam transmutatur:

$$\begin{aligned} o = \;& P^{I}\left(\frac{dp^{I}}{dx^{I}}\right)dx^{I} + P^{II}\left(\frac{dp^{II}}{dx^{II}}\right)dx^{II} + P^{III}\left(\frac{dp^{III}}{dx^{III}}\right)dx^{III} + \ldots\ldots \\ & + P^{I}\left(\frac{dp^{I}}{dy^{I}}\right)dy^{I} + P^{II}\left(\frac{dp^{II}}{dy^{II}}\right)dy^{II} + P^{III}\left(\frac{dp^{III}}{dy^{III}}\right)dy^{III} + \ldots\ldots \\ & + P^{I}\left(\frac{dp^{I}}{dz^{I}}\right)dz^{I} + P^{II}\left(\frac{dp^{II}}{dz^{II}}\right)dz^{II} + P^{III}\left(\frac{dp^{III}}{dz^{III}}\right)dz^{III} + \ldots\ldots [39]. \end{aligned}$$

Quae, quando systematis figura fuerit invariabilis, secundum (27), [36] in eam abibit

$$\begin{aligned} o = \;& \left(P^{I}\left(\frac{dp^{I}}{dx^{I}}\right) + P^{II}\left(\frac{dp^{II}}{dx^{II}}\right) + P^{III}\left(\frac{dp^{III}}{dx^{III}}\right) + \ldots\right)dx \\ & + \left(P^{I}\left(\frac{dp^{I}}{dy^{I}}\right) + P^{II}\left(\frac{dp^{II}}{dy^{II}}\right) + P^{III}\left(\frac{dp^{III}}{dy^{III}}\right) + \ldots\right)dy \\ & + \left(P^{I}\left(\frac{dp^{I}}{dz^{I}}\right) + P^{II}\left(\frac{dp^{II}}{dz^{II}}\right) + P^{III}\left(\frac{dp^{III}}{dz^{III}}\right) + \ldots\right)dz \ldots\ldots [40]. \end{aligned}$$

In systemate autem libero (25), differentialibus dx, dy, dz, nullo modo a se invicem pendentibus, haud aliter aequationi [40] satis fieri potest quam ponendo quemvis illorum trium terminorum seorsum $= o$, ideoque

$$\left.\begin{array}{l} o = P^{\prime}\left(\frac{dp^{\prime}}{dx^{\prime}}\right) + P^{\prime\prime}\left(\frac{dp^{\prime\prime}}{dx^{\prime\prime}}\right) + P^{\prime\prime\prime}\left(\frac{dp^{\prime\prime\prime}}{dx^{\prime\prime\prime}}\right) + \ldots\ldots\ldots \\ o = P^{\prime}\left(\frac{dp^{\prime}}{dy^{\prime}}\right) + P^{\prime\prime}\left(\frac{dp^{\prime\prime}}{dy^{\prime\prime}}\right) + P^{\prime\prime\prime}\left(\frac{dp^{\prime\prime\prime}}{dy^{\prime\prime\prime}}\right) + \ldots\ldots\ldots \\ o = P^{\prime}\left(\frac{dp^{\prime}}{dz^{\prime}}\right) + P^{\prime\prime}\left(\frac{dp^{\prime\prime}}{dz^{\prime\prime}}\right) + P^{\prime\prime\prime}\left(\frac{dp^{\prime\prime\prime}}{dz^{\prime\prime\prime}}\right) + \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots [41].$$

Quibus secundum (21) aequivalent istae:

$$\left.\begin{array}{l} o = P^{\prime}\cos(p^{\prime},x) + P^{\prime\prime}\cos(p^{\prime\prime},x) + P^{\prime\prime\prime}\cos(p^{\prime\prime\prime},x) + \ldots \\ o = P^{\prime}\cos(p^{\prime},y) + P^{\prime\prime}\cos(p^{\prime\prime},y) + P^{\prime\prime\prime}\cos(p^{\prime\prime\prime},y) + \ldots \\ o = P^{\prime}\cos(p^{\prime},z) + P^{\prime\prime}\cos(p^{\prime\prime},z) + P^{\prime\prime\prime}\cos(p^{\prime\prime\prime},z) + \ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots [42].$$

Et si brevitatis caussa ponatur

$$X = P^{\prime\prime}\cos(p^{\prime\prime},x) + P^{\prime\prime\prime}\cos(p^{\prime\prime\prime},x) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y = P^{\prime\prime}\cos(p^{\prime\prime},y) + P^{\prime\prime\prime}\cos(p^{\prime\prime\prime},y) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z = P^{\prime\prime}\cos(p^{\prime\prime},z) + P^{\prime\prime\prime}\cos(p^{\prime\prime\prime},z) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

habebimus adhuc

$$\left.\begin{array}{l} P^{\prime}\cos(p^{\prime},x) = -X \\ P^{\prime}\cos(p^{\prime},y) = -Y \\ P^{\prime}\cos(p^{\prime},z) = -Z \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [43]$$

et adhibita formula [3]

$$P^{\prime 2} = X^2 + Y^2 + Z^2$$

$$\text{vel } P^{\prime} = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [44].$$

Docetque aequatio [42] quomodo quaevis data vis P in tres alias, secundum tres coordinatarum axes directas, resolvi, omnesque ejusdem directionis in unam colligi, et aequatio [44], quomodo ex his earum vis media inveniri potest. Sed etiam hujus directio nullo negotio ex [43] eruitur quippe quam determinant formulae inde collectae:

$$\left.\begin{array}{l} \cos(p^{\prime},x) = -\frac{X}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}} \\ \cos(p^{\prime},y) = -\frac{Y}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}} \\ \cos(p^{\prime},z) = -\frac{Z}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots [45].$$

31. Formulae generales (30) motum qui secundum lineas fit coordinatarum axibus parallelas, itaque *rectilineum*, respiciunt, alias *progressivum* dictum. Abstrahunt [41], [42], a loco dato tam vis sollicitantis, quam puncti sollicitati. Nihil igitur in istiusmodi conditionibus aequipondium constituentibus mutatur, cum dicta loca ubivis transferantur, dummodo cujuscunque vis directio eundem versus tres axes obtineat situm.

In casu (27) quo punctorum M aliquod fixum et, propter id, quodvis dx, dy, $dz = o$ fuerit, termini formulae [39] per se evanescent: tum igitur nulla datur progressio.

32. Cessante ita quidem systematis progressione, *rotatio* tamen circa punctum fixum fieri poterit, nisi et hanc singulares conditiones datae evanescere faciant.

33. Quas ut detegamus, meminerimus, esse $dp = \left(\frac{dp}{d\varphi}\right) d\varphi$, cum sit p functio aliqua quantitatis variabilis φ. Ita aequatio fundamentalis [37] in eam mutatur:

$$o = P'\left(\frac{dp'}{d\varphi'}\right) d\varphi' + P''\left(\frac{dp''}{d\varphi''}\right) d\varphi'' + P'''\left(\frac{dp'''}{d\varphi'''}\right) d\varphi''' + \ldots\ldots [46].$$

Qua existente, summa videlicet momentorum motus angularis circa axem z evanescit; cessat igitur circa illum systematis rotatio.

Figura systematis supposita invariabili, formula [46] secundum (27) in hanc aliam transit

$$o = P'\left(\frac{dp'}{d\varphi'}\right) + P''\left(\frac{dp''}{d\varphi''}\right) + P'''\left(\frac{dp'''}{d\varphi'''}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [47]$$

quae mediante aequatione [33] fit

$$o = \frac{P'r'R'}{p'} \sin\varepsilon' \sin E' \sin(\Phi'-\varphi') + \frac{P''r''R''}{p''} \sin\varepsilon'' \sin E'' \sin(\Phi''-\varphi'') + \ldots [48].$$

Quia vero secundum (13) loci virium, ideoque intervalla p sunt arbitraria, nihil impedit quo minus haec ita constituamus, ut ubivis $\frac{P}{p}$ sit $= 1$, quo fit

$$o = r'R' \sin\varepsilon' \sin E' \sin(\Phi'-\varphi') + r''R'' \sin\varepsilon'' \sin E'' \sin(\Phi''-\varphi'') + \ldots [49]$$

qui termini dupla sunt arearum triangularium quas supra (23) consideravimus, quorum igitur summa in casu aequipondii quoad rotationem existentis erit $= o$.

Substitutis valoribus [34] aequatio [49] formam adoptat eam:

$$o = P'\pi'\sin\gamma' + P''\pi''\sin\gamma'' + P'''\pi'''\sin\gamma''' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [50].$$

34. Formulae (33) detectae speciatim ad rotationem pertinent quae in plano coordinato (xy) fieri possit (23). Secundum vero quod (24) dictum est ipsae nullo negotio et ad reliqua plana coordinata applicabuntur. Quo igitur aequipondium in quocunque horum planorum quoad rotationem subsistat, habeamus necesse est tres eas conditiones simultaneas:

$$\left.\begin{aligned} o &= P'\left(\frac{dp'}{d\varphi'}\right) + P''\left(\frac{dp''}{d\varphi''}\right) + P'''\left(\frac{dp'''}{d\varphi'''}\right) + \ldots\ldots \\ o &= P'\left(\frac{dp'}{d\psi'}\right) + P''\left(\frac{dp''}{d\psi''}\right) + P'''\left(\frac{dp'''}{d\psi'''}\right) + \ldots\ldots \\ o &= P'\left(\frac{dp'}{d\omega'}\right) + P''\left(\frac{dp''}{d\omega''}\right) + P'''\left(\frac{dp'''}{d\omega'''}\right) + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots [51].$$

35. Aequatio [33], evoluta, fit

$$\left(\frac{dp}{d\varphi}\right) = -\frac{rR\sin\varepsilon\sin E\sin\Phi\cos\varphi - rR\sin\varepsilon\sin E\sin\varphi\cos\Phi}{p}$$

quae substitutis valoribus ex [30] depromptis evadet talis

$$\left(\frac{dp}{d\varphi}\right) = \frac{ay - bx}{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [52].$$

Est autem secundum (14)

$$a = x - p\cos(p,x)$$
$$b = y - p\cos(p,y)$$

inde formula [52] mutatur in:

$$\left(\frac{dp}{d\varphi}\right) = x\cos(p,y) - y\cos(p,x) \ldots\ldots\ldots\ldots [53].$$

Quapropter erunt aequationes [51] eaedem ac

$o =$

$$\left.\begin{array}{l} o = P^{I}(x^{I}\cos(p^{I},y) - y^{I}\cos(p^{I},x)) + P^{II}(x^{II}\cos(p^{II},y) - y^{II}\cos(p^{II},x)) + \ldots \\ o = P^{I}(x^{I}\cos(p^{I},z) - z^{I}\cos(p^{I},x)) + P^{II}(x^{II}\cos(p^{II},z) - z^{II}\cos(p^{II},x)) + \ldots \\ o = P^{I}(y^{I}\cos(p^{I},z) - z^{I}\cos(p^{I},y)) + P^{II}(y^{II}\cos(p^{II},z) - z^{II}\cos(p^{II},y)) + \ldots \end{array}\right\} [54].$$

Et si brevitatis caussa generatim ponatur

$$P\cos(p,x) = -X;\ P\cos(p,y) = -Y;\ P\cos(p,z) = -Z$$

illae tandem in has formas transeunt

$$\left.\begin{array}{l} o = X^{I}y^{I} - Y^{I}x^{I} + X^{II}y^{II} - Y^{II}x^{II} + X^{III}y^{III} - Y^{III}x^{III} + \ldots \\ o = X^{I}z^{I} - Z^{I}x^{I} + X^{II}z^{II} - Z^{II}x^{II} + X^{III}z^{III} - Z^{III}x^{III} + \ldots \\ o = Y^{I}z^{I} - Z^{I}y^{I} + Y^{II}z^{II} - Z^{II}y^{II} + Y^{III}z^{III} - Z^{III}y^{III} + \ldots \end{array}\right\} \ldots [55].$$

37. E formulis [30] per differentiationem accipimus

1) pro rotatione circa axem z

$$dz = o$$
$$dy = x d\phi$$
$$dx = -y d\phi.$$

2) pro rotatione circa axem y, litteras tantum permutando

$$dy = o$$
$$dx = z d\psi$$
$$dz = -x d\psi$$

3) pro rotatione circa axem x

$$dx = o$$
$$dz = y d\omega$$
$$dy = -z d\omega.$$

Quodsi rotationem simultaneam infinite parvam circa quemque axium mente concipiamus, erunt summae illarum rotationum particularium

$$\left.\begin{array}{l} dx = z d\psi - y d\phi \\ dy = x d\phi - z d\omega \\ dz = y d\omega - x d\psi \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots [56].$$

Supponamus, vectorem r in hac rotatione triplici simultanea facere motum angularem dt. Tum $r dt$ aperte erit arcus differentialis a

puncto mobili, ad quod r pertinet, descriptus, quem ponamus $= ds$. Secundum principia calculi differentialis habemus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \ldots\ldots\ldots\ldots [57]$$

quae formula substitutis valoribus [56] abit in

$$ds^2 = (x^2+y^2)d\varphi^2 + (x^2+z^2)d\psi^2 + (y^2+z^2)d\omega^2 - 2(xyd\omega d\psi + xzd\omega d\varphi + yzd\varphi d\psi)$$

$$= (x^2+y^2+z^2)(d\varphi^2+d\psi^2+d\omega^2) - (x^2 d\omega^2 + y^2 d\psi^2 + z^2 d\omega^2 + 2xyd\omega d\psi + 2xzd\omega d\varphi + 2yzd\varphi d\psi);$$ et, quia $x^2+y^2+z^2 = r^2$,

$$= r^2(d\varphi^2+d\psi^2+d\omega^2) - (xd\omega + yd\psi + zd\varphi)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots [58].$$

38. Arcus ds, quia ductus est radio r, ad circulum pertinet, cujus area originem transgreditur coordinatarum, ideoque plana coordinata (yz), (xz), (xy) secabit sub angulis quos ponamus $= \lambda, \mu, \nu$. Secundum quod (18), (19) dictum est, areae illi satisfaciens aequatio erit aperte

$$o = x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu \ldots\ldots\ldots\ldots [59],$$

quae igitur vicissim per datam areae positionem ut vera evincitur. Cum vero per $d\varphi$, $d\psi$, $d\omega$, angulos differentiales in planis (xy), (xz), (yz) designaverimus (23), (24); in punctis, quibus illa area circuli, plana dicta intersecat, describamus arcus differentiales $rd\varphi$, $rd\psi$, $rd\omega$. Perspicuum est, arcus $rd\varphi$ et rdt latera esse trianguli sphaerici. Est autem $rd\varphi$, (quia in plano (xy)) $= \sqrt{(dx^2+dy^2)}$; ideoque $ds^2 = (rd\varphi)^2 + dz^2$ [57]. Triangulum ergo illud sphaericum est rectangulum, unde colligitur

$$\frac{rd\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt} = \cos\nu.$$ Simili modo invenitur

$$\frac{d\psi}{dt} = \cos\mu$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \cos\lambda \ldots\ldots\ldots\ldots [60].$$

Habemus inde: $\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{\cos\lambda}{\cos\nu}$; $\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\cos\mu}{\cos\nu} \ldots\ldots\ldots\ldots [61].$

Terminus aequationis [58], $(x d\omega + y d\psi + z d\phi)^2$ facile hanc aliam induit formam: $d\phi^2 \left(x\frac{d\omega}{d\phi} + y\frac{d\psi}{d\phi} + z \right)^2$, quae, substitutis valoribus [61], erit

$$= \frac{d\phi^2}{\cos\nu^2}(x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu)^2.$$

Quia vero $x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = o$ [59], sequitur esse quoque

$$x d\omega + y d\psi + z d\phi = o.$$

Formula igitur [58] revera dabit

$$ds^2 = r^2(d\phi^2 + d\psi^2 + d\omega^2)$$

sive $ds = r\sqrt{(d\phi^2 + d\psi^2 + d\omega^2)}$

unde $dt = \sqrt{(d\phi^2 + d\psi^2 + d\omega^2)}$

39. Elucet ex praemissis (37, 38), quemadmodum e rotatione triplici simultanea in planis sibi invicem perpendicularibus alia simplex componitur peracta in plano alio illa sub datis angulis intersecante, qui facile quidem sunt inventu: enim vero si, ut antea, $d\phi$, $d\psi$, $d\omega$ sint motuum angularium in tribus istis planis coordinatis differentialia, ex formulis [60] progrediuntur

$$\cos\lambda = \frac{d\omega}{\sqrt{(d\phi^2 + d\psi^2 + d\omega^2)}}; \cos\mu = \frac{d\psi}{\sqrt{(d\phi^2 + d\psi^2 + d\omega^2)}}; \cos\nu = \frac{d\phi}{\sqrt{(d\phi^2 + d\psi^2 + d\omega^2)}} \quad ..[62].$$

Inde vero est quoque perspicuum, quamlibet rotationem systematis mechanici posse resolvi in tres alias simultaneas circa planorum coordinatorum axes, quae si cessant propter conditiones aequipondium constituentes nec ulla alia rotatio dari potest.

40. Generatim hucusque vires P', P''..... consideravimus: nunc vero ad originem earum particularem animadvertamus. Et sit quidem vis aliqua $\overline{P}$ in puncto ipso systematis aliquo mobili locata, hujusque coordinatae sint: $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$. Sollicitetur ab illa punctum quodvis aliud cujus coordinatae: $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$, $\overline{\overline{z}}$. Tum, si $\overline{p}$ nominemus intervallum, quo locus vis sollicitantis distat a puncto sollicitato, erit

$$\bar{p} = \sqrt{(\bar{\bar{x}}-\bar{x})^2+(\bar{\bar{y}}-\bar{y})^2+(\bar{\bar{z}}-\bar{z})^2}$$

Figura autem systematis posita invariabili, necessario erit ut (27)

$$d\bar{p} = o; \text{ eodemque modo } \left(\frac{d\bar{p}}{dx}\right) = o; \left(\frac{d\bar{p}}{d\phi}\right) = o.$$

Quo colligimus, vires internas, quae a punctis ipsis systematis mechanici figurae invariabilis exoriuntur in conditionibus aequipondii nullius esse momenti.

CAPUT III.

VIRES IN IDEM PUNCTUM MOBILE CONSPIRANTES.

41. *Problema*: Invenire aequipondii conditiones, cum duae vires P', P'', secundum directiones p', p'' idem punctum mobile propellere tentant.

Solutio: Formulae [42] ad problematis casum applicatae dant:

$$\left.\begin{aligned} o &= P'\cos(p',x)+P''\cos(p'',x)\\ o &= P'\cos(p',y)+P''\cos(p'',y)\\ o &= P'\cos(p',z)+P''\cos(p'',z)\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots [63].$$

Ponatur, (quod secundum geometriam licebit), planum per lineas rectas p', p'' in puncto mobili se invicem secantes, et eligamus illud pro plano coordinato (xy). Tum patet esse

$$(p',z) = (p'',z) = 90^\circ, \text{ ideoque}$$

$$\cos(p',z) = \cos(p''z) = o$$

unde sequitur, mediante formula [3],

$$1 = \cos^2(p',x) + \cos^2(p',y)$$

$$1 = \cos^2(p'',x) + \cos^2(p'',y)$$

quo venit: $\cos(p',y) = \sin(p',x)$

$$\cos(p'',y) = \sin(p'',x).$$

Formulae igitur [63] in has alias abeunt

$$\left.\begin{array}{l} o = P'\cos(p',x) + P''\cos(p'',x) \\ o = P'\sin(p',x) + P''\sin(p'',x) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots [64].$$

Quod si hinc vel P', vel P'' eliminemus, emergit

$$o = \sin[(p'',x) - (p',x)], \text{ inde vero}$$

$$(p'',x) = (p',x)$$

mutantur igitur aequationes [64] in hanc unicam

$$P' = -P'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [65].$$

Oportet ergo, vires duas in idem punctum agentes, quo sint in aequipondio, sibi invicem esse aequales atque contrarie oppositas.

42. *Problema:* Invenire aequipondii conditiones, cum tres vires P', P'', P''', secundum directiones p', p'', p''', idem punctum mobile propellere tentant.

Solutio: Formulae [42] ad problematis casum applicatae dant:

$$\left.\begin{array}{l} o = P'\cos(p',x) + P''\cos(p'',x) + P'''\cos(p''',x) \\ o = P'\cos(p',y) + P''\cos(p'',y) + P'''\cos(p''',y) \\ o = P'\cos(p',z) + P''\cos(p'',z) + P'''\cos(p''',z) \end{array}\right\} [66].$$

Ponatur planum per lineas rectas p'', p''', quod pro coordinato (xy) eligamus. Tum patet esse

$$\cos(p'',z) = \cos(p''',z) = o$$

unde sequitur ex formularum [66] tertia

$$o = P'\cos(p',z), \text{ ideoque}$$

$$o = \cos(p',z)$$

Unde apparet, rectam quoque p' sitam esse in eodem plano, quo p'', p'''. Est igitur conditio necessaria, quo inter tres vires in idem punctum conspirantes obtineatur aequipondium, ut earum directiones in eodem locatae sint plano.

Simili autem, quem (41) vidimus modo, mutantur formulae [66] in duas sequentes:

$$\left.\begin{aligned} o &= P'\cos(p',x) + P''\cos(p'',x) + P'''\cos(p''',x) \\ o &= P'\sin(p',x) + P''\sin(p'',x) + P'''\sin(p''',x) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots [67]$$

sive vim P' pro media reliquarum ponendo

$$P'\cos(p',x) = -P''\cos(p'',x) - P'''\cos(p''',x)$$

$$P'\sin(p',x) = -P''\sin(p'',x) - P'''\sin(p''',x)$$

unde statim prodibit

$$\begin{aligned} P'^2 &= P''^2 + P'''^2 + 2P''P'''[\cos(p'',x)\cos(p''',x) + \sin(p'',x)\sin(p'''x)] \\ &= P''^2 + P'''^2 + 2P''P'''\cos[(p'',x) - (p''',x)] \ldots\ldots\ldots\ldots [68]. \end{aligned}$$

Quia vero p'', p''' secundum hypothesin in plano (xy) jacent, situsque axis x est arbitrarius, hunc per intersectionem rectarum p', p'' ad eandem utriusque partem trahi licet, quo facto erit

$$(p'',x) - (p''',x) = \pm(p'',p'''), \text{ ideoque}$$

$$P'^2 = P''^2 + P'''^2 \pm 2P''P'''\cos(p',p''') \ldots\ldots [69].$$

Quae aequatio secundum trigonometriam planam exhibet relationem existentem inter latera P'', P''', parallelogrammi ejusque diagonalem P'.

Quodsi ergo vires datas P'', P''', ut lineas rectas, quae parallelogrammum aliquod comprehendant, contemplamur, hujus diagonalis illarum vi mediae erit aequalis. Comprehendunt vero, ut formula [69] docet, P'', P''' ut lineae rectae consideratae, angulum (p'',p'''), qui scilicet idem illarum virium directionibus interjacet. Quia vero nihil impedit, quo minus in formula [69] pro P'' vel P''' ponamus P', unde pro angulo (p'',p''') apparebit angulus (p',p'''), (p',p''): perspicuum est, illarum, quibus parallelogrammum formatur, rectarum binas

angulum intercludere directionum, in quibus vires agunt congruentes. Diagonalis ergo parallelogrammi, per punctum mobile ducta non tantum quantitatem, sed etiam directionem vis reliquarum mediae exhibebit.

Tum autem ex aequatione [67] etiam haec altera absque ulla difficultate eruitur

$$o = P'^2 + P''^2 + P'''^2 + 2P'P''[\cos(p',x)\cos(p'',x) + \sin(p',x)\sin(p'',x)]$$
$$+ 2P'P'''[\cos(p',x)\cos(p''',x) + \sin(p',x)\sin(p'''x)]$$
$$+ 2P''P'''[\cos(p'',x)\cos(p''',x) + \sin(p''x)\sin(p''',x)]$$

sive, id quod idem est

$$o = P'^2 + P''^2 + P'''^2 + 2P'P''\cos[(p',x)-(p'',x)] + 2P'P'''\cos[(p',x)-(p''',x)]$$
$$+ 2P''P'''\cos[(p'',x)-(p''',x)]$$

quod dabit, quia rectae p', p'', p''' in eodem plano sunt cum axe x

$$o = P'^2 + P''^2 + P'''^2 \pm 2[P'P''\cos(p',p'') + P'P'''\cos(p',p''')$$
$$+ P''P'''\cos(p'',p''')]$$

qua formula comparata cum [69] erit

$$o = P'^2 \pm [P'P''\cos(p',p'') + P'P'''\cos(p',p''')]; \text{ unde etiam}$$

$$P' = \mp [P''\cos(p',p'') + P'''\cos(p',p''')] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [70].$$

Quae est altera aequatio, parallelogrammum, quod *virium* appellatur, exhibens.

In parallelogrammo ita constructo habemus, secundum trigonometriam planam,

$$P' : P'' = \sin(p'',p''') : \sin(p',p''')$$
$$P' : P''' = \sin(p'',p''') : \sin(p',p'')$$

unde erit

$$\frac{P'}{\sin(p'',p''')} = \frac{P''}{\sin(p',p''')} = \frac{P'''}{\sin(p',p'')} \ldots\ldots\ldots [71]$$

posito $(p',p'') = (p',p''')$, erit aperte

$$\sin(p'',p''') = 2\sin(p',p'')\cos(p',p'') = 2\sin(p',p''')\cos(p',p''')$$

formulaque [71] hoc casu mutatur in eam

$$P' = 2P''\cos(p',p''') = 2P'''\cos(p',p'')$$

unde sequitur $P'' = P'''$.

Si vero, omnes tres vires supponantur esse inter se aequales, formula [68] dabit

$$1 = 1 + 1 + 2(\cos(p'',x)\cos(p''',x) + \sin(p'',x)\sin(p''',x))$$

vel $-\frac{1}{2} = \pm\cos(p'',p''') = \pm\cos 60°$

et simili modo in hoc casu invenitur quoque

$$(p',p'') = 60°;\ (p',p''') = 60°.$$

43. *Problema:* Invenire aequipondii conditiones, cum quatuor vires P', P'', P''', P^{IV} secundum directiones p', p'', p''', p^{IV} in idem agunt punctum mobile.

Solutio: Formulae [42] ad problematis casum applicatae dant:

$$\left.\begin{aligned} o &= P'\cos(p',x) + P''\cos(p'',x) + P'''\cos(p''',x) + P^{IV}\cos(p^{IV},x) \\ o &= P'\cos(p',y) + P''\cos(p'',y) + P'''\cos(p''',y) + P^{IV}\cos(p^{IV},y) \\ o &= P'\cos(p',z) + P''\cos(p'',z) + P'''\cos(p''',z) + P^{IV}\cos(p^{IV},z) \end{aligned}\right\}[72]$$

ex [3] habemus

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \cos^2(p',x) + \cos^2(p',y) + \cos^2(p',z) \\ 1 &= \cos^2(p'',x) + \cos^2(p'',y) + \cos^2(p'',z) \\ 1 &= \cos^2(p''',x) + \cos^2(p''',y) + \cos^2(p''',z) \\ 1 &= \cos^2(p^{IV},x) + \cos^2(p^{IV},y) + \cos^2(p^{IV},z) \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots [73]$$

denique ex [14]

$$\left.\begin{aligned} \cos(p',p'') &= \cos(p',x)\cos(p'',x) + \cos(p',y)\cos(p'',y) + \cos(p',z)\cos(p'',z) \\ \cos(p',p''') &= \cos(p',x)\cos(p''',x) + \cos(p',y)\cos(p''',y) + \cos(p',z)\cos(p''',z) \\ \cos(p',p^{IV}) &= \cos(p',x)\cos(p^{IV},x) + \cos(p',y)\cos(p^{IV},y) + \cos(p',z)\cos(p^{IV},z) \\ \cos(p'',p''') &= \cos(p'',x)\cos(p''',x) + \cos(p'',y)\cos(p''',y) + \cos(p'',z)\cos(p''',z) \\ \cos(p'',p^{IV}) &= \cos(p'',x)\cos(p^{IV},x) + \cos(p'',y)\cos(p^{IV},y) + \cos(p'',z)\cos(p^{IV},z) \\ \cos(p''',p^{IV}) &= \cos(p''',x)\cos(p^{IV},x) + \cos(p''',y)\cos(p^{IV},y) + \cos(p''',z)\cos(p^{IV},z) \end{aligned}\right\}[74].$$

Tum si formulas [72] aequali modo tractaveris, ac in formulam [69] ex-

explicando factum est, substitutis valoribus e [73], [74] depromtis, proveniet

$$P'^2 = P''^2 + P'''^2 + P^{IV 2} + 2[P''P'''\cos(p'',p''') + P''P^{IV}\cos(p'',p^{IV}) + P'''P^{IV}\cos(p''',p^{IV})] \ldots [75].$$

Quae aequatio secundum trigonometriam planam exhibet relationem existentem inter latera P'', P''', P^{IV} parallelepipedi cujuscunque, ejusque diagonalem. Inde autem facile conclusiones earum similes colligi possunt, quae (42) de parallelogrammo virium jam sunt prolatae.

Si vero formulam [72] eadem ratione qua formula [70] explicata est, transmutaveris, hujus quoque comparabis similem eam:

$$P' = \pm[P''\cos(p',p'') + P'''\cos(p',p''') + P^{IV}\cos(p',p^{IV})] \ldots [76].$$

CAPUT IV.

VIRES PARALLELAE.

44. Virium directionibus p', p'', p'''..... sibi invicem parallelis, anguli (p,x), (p,y), (p,z) pro unaquaque earum sunt aperte iidem. Auferuntur itaque eorum cosinus e conditionibus aequipondii generalibus [42] per divisionem. Quae ergo confundentur in unam:

$$o = P' + P'' + P''' + \ldots \ldots [77].$$

45. Eodem modo formulae [50], [54] aequipondium in motu rotatorio generatim constituentes, cum directiones virium praesumantur parallelae, in eas abeunt:

$$o = P'\pi' + P''\pi'' + P'''\pi''' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [78]$$

$$\left.\begin{array}{l}(a)\ldots o = (P'x'+P''x''+P'''x'''+\ldots)\cos(p,y) - (P'y'+P''y''+P'''y'''+\ldots)\cos(p,x)\\(b)\ldots o = (P'x'+P''x''+P'''x'''+\ldots)\cos(p,z) - (P'z'+P''z''+P'''z'''+\ldots)\cos(p,x)\\(c)\ldots o = (P'y'+P''y''+P'''y'''+\ldots)\cos(p,z) - (P'z'+P''z''+P'''z'''+\ldots)\cos(p,y)\end{array}\right\} [79].$$

Tum, si supponatur z esse directio virium parallelarum communis, erit $\cos(p,z) = 1$; igitur $\cos(p,x) = o$, $\cos(p,y) = o$, secundum [3]. Inde aequatio [79 a] per se evanescit, in plano itaque (xy) ad quod ea pertinet nullus omnino motus rotatorius existere potest. Aequatio autem [79, b] dabit conditionem aequipondii

$$o = P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [80]$$

ad planum (xz); atque aequatio [79, c] eam

$$o = P'y' + P''y'' + P''y''' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [81]$$

ad planum (yz) pertinentem.

46. In casu naturae gravitatio inter se parallelas procreat vires in horizonte perpendiculares. Quodsi igitur horizontem pro plano (xy) eligimus, gravitas in directione agit coordinatae z, eruntque aequationes [80], [81] conditiones aequipondii, quibus datis systema mechanicum a gravitate sollicitatum rotari nequit.

47. E formulis [80], [81] facile erit inventu situs axis z, per punctum, quod in systemate fixum supponitur, transientis, et gravitatis directioni paralleli, quando punctorum mobilium loci, et virium, quae ea sollicitant, quantitates sunt datae.

Sit enim generatim distantia punctorum mobilium a duobus sibi invicem et horizonti perpendicularibus planis quibuscunque $= \beta, \alpha$; horumque autem quaesitae distantiae a planis coordinatis (xz), (yz), quae sint illis datis parallela $= n, \xi$. Tum aperte erit $x = \alpha \pm \xi$; $y = \beta \pm n$; quibus substitutis in formulis [80], [81], habemus

$$o = P'\alpha' + P''\alpha'' + P'''\alpha''' + \ldots \pm (P' + P'' + P''' + \ldots)\xi$$

$$o = P'\beta + P''\beta'' + P'''\beta''' + \ldots \pm (P' + P'' + P''' + \ldots)n$$

unde proveniunt

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \pm\frac{P'\alpha' + P''\alpha'' + P'''\alpha''' + \ldots}{P' + P'' + P''' + \ldots\ldots\ldots} \\ \eta &= \pm\frac{P'\beta' + P''\beta'' + P'''\beta''' + \ldots}{P' + P'' + P''' + \ldots\ldots\ldots} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots [82].$$

48. Punctum fixum, per quod axis z transire supponitur, quod ergo origo est coordinatarum, *centrum* nominatur *gravitatis* atque circa illud ob conditiones datas nulla rotatio per vim gravitatis oriri potest. Ad illius analogiam centrum gravitatis generatim punctum nuncupamus fixum circa quod, propter conditiones datas, nulla omnino rotatio poterit nasci, quaevis sint vires agentes, earumque directiones.

49. Aequationes fundamentales, quae aequipondium pro motu tam progressivo, quam rotatorio constituunt, nullam, sicut vidimus, continent determinationem loci neque puncti mobilis, neque vis illud sollicitantis, sed magnitudinis tantum virium, earumque directionum. Nihil igitur obstat, quo minus in casu aequipondii omnes vires in centro gravitatis quasi conjunctas supponamus, et hoc pro toto systemate mechanico accipiamus.

CAPUT V.

SYSTEMA MECHANICUM NON LIBERUM.

50. Secundum (25) quaelibet conditio motum liberum systematis in quovis puncto mobili impediens naturam adoptat superficiei curvae, cui illud quasi inhaerere cogitari potest.

Aequatio generalis ejusmodi superficiei, $u = o$, continet functionem coordinatarum x, y, z, et quidem aut generatim, ita ut relationem inter illas constituat pro omnibus punctis systematis eandem, aut tantum coordinatarum cujusdam puncti particularium. In casu priori conditio adest generalis ad omnia systematis puncta aeque referenda; in posteriori specialis tantum, quae ad data quaedam puncta attinet.

Terminum $\lambda du = o$ [29] superius (22) explicatum addere possumus summae $P' dp' + P'' dp'' + P''' dp''' + \ldots$ [37] sine ulla quantitatis vel naturae ejusdem variatione. Ita habebimus

$$o = P' dp' + P'' dp'' + P''' dp''' + \ldots\ldots + \lambda du \ldots\ldots [83]$$

sive, id quod vi formulae [29] idem est

$$o = P'dp' + P''dp'' + P'''dp''' + \ldots + \lambda \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2} \,.\, dp.$$

Sic formulam generalem, quae pertinet ad systematis liberi aequipondium, systemati non libero, conditioni $u = o$ adstricto adaptamus. Haec autem ibi apparet sub forma momenti cujusdam Pdp in quo $P = \lambda \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}$, vis aliqua agens secundum differentiale dp, scilicet in linea recta superficiei curvae cujus aequatio $u = o$, ad rectos insistente angulos, quod quidem e supra dictis (21), (22) perspicuum est.

Patet inde, vim illam $\lambda \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}$ esse impressionem perpendicularem superficiei, cujus aequatio $u = o$, et quidem in eo puncto quod a coordinatis x, y, z, determinatur.

Sequitur porro ex dictis, aequationem

$$o = P' dp' + P'' dp'' + P''' dp''' + \ldots + \lambda du$$

nulla re differre ab illa, quae aequipondium systematis liberi constituit, ideoque eodem modo, quasi liberum systema sit, tractari posse,

nihilominus conditionem cui illud sit adstrictum exhibere atque impressionem indicare, quam quodvis punctum ejusdem systematis ob conditionem datam experietur.

Eodem autem modo, cum plures ejusmodi conditiones datae fuerint, e. gr. $v = o$, $w = o$; aequatio ista generalis terminis μdv; νdw; augmentabitur, adhibitis factoribus non determinatis: μ, ν.

Tum si ex aequationibus ita comparatis factores illos indeterminatos eliminaverimus, eruetur inde relatio coordinatarum x, y, z, inter se invicem, qualem conditiones datae postulabunt.

Hac ratione idem est, utrum statim juxta conditionum datarum normam eam relationem determinaveris, an conditiones ipsas sub specie momentorum in formulam generalem introduxeris, et hanc, quasi systema sit liberum, tractaveris.

51. Quae altera methodus, quia ob simplicitatem nonnumquam erit praeferenda, cujus sit indolis, exemplo videamus.

Sit quaedam conditio systematis mechanici ad formam $du = o$ reducta. Tum e formula generali [83] et ex aequatione $\lambda du = \lambda\left(\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy + \left(\frac{du}{dz}\right)dz\right)$, (22) profluunt:

$$o = P^{I}\cos(p^{I},x) + P^{II}\cos(p^{II},x) + P^{III}\cos(p^{III},x) + \ldots + \lambda\left(\frac{du}{dx}\right),$$

$$o = P^{I}\cos(p^{I},y) + P^{II}\cos(p^{II},y) + P^{III}\cos(p^{III},y) + \ldots + \lambda\left(\frac{du}{dy}\right),$$

$$o = P^{I}\cos(p^{I},z) + P^{II}\cos(p^{II},z) + P^{III}\cos(p^{III},z) + \ldots + \lambda\left(\frac{du}{dz}\right),$$

quarum loco, brevitatis caussa, ponamus:

$$\left.\begin{aligned} o &= X + \lambda\left(\frac{du}{dx}\right) \\ o &= Y + \lambda\left(\frac{du}{dy}\right) \\ o &= Z + \lambda\left(\frac{du}{dz}\right) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [83].$$

Eliminato factore λ, aequationes, quae relationem inter x, y, z, conditioni datae consentaneam exhibent, nanciscimur:

$$\left.\begin{aligned} o &= X\left(\frac{d}{dy}\right) - Y\left(\frac{du}{dx}\right) \\ o &= Y\left(\frac{du}{dz}\right) - Z\left(\frac{du}{dy}\right) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [84].$$

Quodsi vero factorem λ ipsum ex aequat. [83] determinemus, habebimus:

$$\lambda = \sqrt{\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}}$$

atque impressionem e conditione data oriundam:

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}\right)^2} = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)} \ldots\ldots\ldots\ldots [85].$$

CAPUT VI.

V E C T I S.

52. E puncto fixo, circa quod systema mechanicum quaquam versus libere rotari possit ad puncta ejus mobilia M', M'', M'''.... ubicunque posita ducantur radii vectores r', r'', r'''.... quos, ut virgulas, mente concipiamus, neque flexibiles, neque contractione, vel extensione capaces: erit ista notio vectis multipedis maxime generalis.

53. Sollicitetur quodvis punctum M secundum quaslibet directiones a viribus quibuscunque, ita tamen, ut P sit earum media, ejusque directio linea recta p.

In casu aequipondii generatim erit:

$$o = P'\pi'\sin\gamma' + P'\pi''\sin\gamma'' + P'''\pi'''\sin\gamma''' + \ldots.$$

Designentur anguli quos vector r cum coordinatis z, y, x, comprehendit, per (r,z), (r,y), (r,x). Projiciantur in plana (xy), (xz), (yz) tam linea recta p, quam radius vector r; sitque angulus inter projectiones ambas comprehensus $= u, v, w$. Tum vero facile perspicitur esse π in illis planis deinceps $= r\sin(r,z)\sin u$; $r\sin(r,y)\sin v$; $r\sin(r,x)\sin w$. Anguli denique inter rectam p et coordinatas z, y, x, interjacentes sint γ, β, α. Inde conditiones aequipondii pro rotatione in plano (xy), (xz), (yz) colliguntur

$$\left.\begin{aligned} o &= P'r'\sin(r',z)\sin u'\sin\gamma' + P''r''\sin(r'',z)\sin u''\sin\gamma'' + \ldots \\ o &= P'r'\sin(r',y)\sin v'\sin\beta' + P''r''\sin(r'',y)\sin v''\sin\beta'' + \ldots \\ o &= P'r'\sin(r',x)\sin w'\sin\alpha' + P''r''\sin(r'',x)\sin w''\sin\alpha'' + \ldots \end{aligned}\right\} [86].$$

His igitur datis vectis rotatio nulla datur circa punctum fixum quod originem coordinatarum esse elegimus; viresque eum sollicitantes sunt in aequipondio.

54. In casu virium parallelarum, sicut vidimus Cap. IV., pro quavis directione p idem erit angulus γ, β, α. Ablatis ergo per divisionem, eorum sinibus, ex aequationibus [86] prodibunt hae aliae:

$$\left.\begin{aligned} o &= P'r'\sin(r',z)\sin u' + P''r''\sin(r'',z)\sin u'' + P'''r'''\sin(r''',z)\sin u''' + \ldots \\ o &= P'r'\sin(r',y)\sin v' + P''r''\sin(r''.y)\sin v'' + P'''r'''\sin(r''',y)\sin v''' + \ldots \\ o &= P'r'\sin(r',x)\sin w' + P''r''\sin(r''x)\sin w'' + P'''r'''\sin(r''',x)\sin w + ''' \ldots \end{aligned}\right\} [87].$$

55. Si vis aliqua P dirigatur secundum radium vectorem r, erit aperte $(r,z) = (p,z)$, tum vero confundentur projectioues linearum p et r in plano (xy), unde sequitur, esse $u = o$ aut $= 180°$; itaque $\sin u = \pm o$. Terminus igitur hujus formae $Pr\sin(r,z)\sin u$ erit $= o$.

Eodem modo demonstratur in casu illo esse etiam $Pr\sin(r,y)\sin v = o$; $Pr\sin(r,z)\sin w = o$. Hinc vero apparet, vim talem P secundum radium vectorem r directam in aequationibus aequipondii nullius esse momenti.

56. Sint omnes radii vectores r in eodem plano. Illud semper eligi licebit pro plano coordinato e. gr. (xy). Hoc posito erit (r,z) = recto, ergo $\sin(r,z) = 1$. Ita vero formula aequipondium pro rotatione in plano (xy) constituens [87] in hanc abibit aliam:

$$o = P'r'\sin u' + P''r''\sin u'' + P'''r'''\sin u''' + \ldots\ldots [88].$$

Vectoris r projectio in plano (xy) tum cum vectore ipso confunditur. Si igitur directio p quoque in eodem plano fuerit sita, angulus projectionum u idem erit ac (r,p), unde sequitur

$$o = P'r'\sin(r',p') + P''r''\sin(r'',p'') + P'''r'''\sin(r''',p''') + \ldots\ldots [89].$$

Eandem aequationem etiam ex generalissima illa [86]

$$o = P'r'\sin(r',z)\sin u'\sin\gamma' + P''r''\sin(r',z)\sin\gamma'' + \ldots\ldots$$

immediate deducimus, ponendo, secundum hypothesin, $\sin\gamma = 1$, $\sin(r,z) = 1$; $\sin u = \sin(r,p)$.

Quo sequitur, aequationem [89] generatim subsistere pro quovis angulo (r,p).

Si vero in formula [89] angulum (r,p) in quovis termino eundem ponamus, sinus ejus evanescet per divisionem, mutabitur igitur formula in:

$$o = P'r' + P''r'' + P'''r''' + \ldots\ldots\ldots\ldots [90],$$

quae eadem proveniet, posito angulo (r,p) ubique = recto.

57. In omnibus praemissis formulis, quae pro vectis rotatione aequipondium constituunt, nulla est mentio angulorum, quos vectores r inter se invicem comprehendunt. Valent ergo dictae formulae, quicumque illi sint. Formula [90] igitur etiam casum continet, in quo omnes vectores in directum jacent.

Pro

Pro vecte bipede obtinemus

$$P^{I}r^{I} + P^{II}r^{II} = o, \text{ sive } \frac{P^{II}}{P^{I}} = -\frac{r^{I}}{r^{II}} \ldots\ldots\ldots [91],$$

et sic deinceps.

58. Si brevitatis caussa ponamus $P^{I} + P^{II} + P^{III} + \ldots = S$; erit secundum [83] in casu virium parallelarum

$$X = S\cos(p,x)$$
$$Y = S\cos(p,y)$$
$$Z = S\cos(p,z)$$

unde venit $S = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$; ideoque

$$S = \lambda\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2} \ldots\ldots\ldots [92].$$

Hinc vero apparet, punctum vectis fixum (hypomochlium vulgo dictum) ubicunque positum in casu virium parallelarum, impressionem perpeti aequalem summae virium parallelarum et versus eandem partem sollicitantium.

CAPUT VII.

PLANUM INCLINATUM.

59. *Problema*: Punctum mobile quovis modo a superficie figurae cujuslibet impediatur in motu libero; duae illud vires P^{I}, P^{II} propellere tendant juxta lineas rectas p^{I}, p^{II}; invenire conditiones aequipondii.

Solutio: Aequatio superficiei impedientis sit:

$$o = du = A\,dx + B\,dy + C\,dz.$$

Habemus ergo ex [83], secundum problematis hypothesin:

$$\left.\begin{aligned} o &= P' \cos(p',x) + P'' \cos(p'',x) + \lambda A \\ o &= P' \cos(p',y) + P'' \cos(p'',y) + \lambda B \\ o &= P' \cos(p',z) + P'' \cos(p'',z) + \lambda C \end{aligned}\right\} \ldots\ldots [90].$$

Factore λ eliminato prodibunt:

$$\left.\begin{aligned} o &= P'(B\cos(p',x) - A\cos(p',y)) + P''(B\cos(p'',x) - A\cos(p'',y)) \\ o &= P'(C\cos(p',x) - A\cos(p',z)) + P''(C\cos(p'',x) - A\cos(p'',z)) \end{aligned}\right\} [91].$$

Quibus problema est solutum.

Ad inveniendam impressionem a superficie perpessam, nullo negotio e formulis [90] deducitur

$$\lambda^2(A^2+B^2+C^2) = P'^2 + P''^2 + 2P'P''(\cos(p',x)\cos(p'',x) + \cos(p',y)\cos(p'',y) + \cos(p',z)\cos(p'',z))$$

$$= P'^2 + P''^2 + 2P'P''\cos(p',p'') \text{ secundum } [14] \ldots\ldots [92].$$

Est igitur, sicut ex [69] et [85] elucet, impressio illa a viribus P', P'', in superficiem datam facta aequalis illarum mediae, versus superficiem illam ad rectos angulos directae.

60. Sit P' vis gravitatis et ponamus planum (xy) horizonti parallelum. Erit $(p',x) = (p',y) = 90°$; ergo $\cos(p',x) = \cos(p',y) = o$ et $\cos(p',z) = 1$. Quibus in formulis [91] substitutis, proveniunt:

$$o = B\cos(p'',x) - A\cos(p'',y) \ldots\ldots\ldots\ldots [93]$$

$$o = -AP' + P''(C\cos(p'',x) - A\cos(p'',z)) \ldots [94].$$

Ex aequatione [93] apparet quemadmodum positio superficiei datae directionem vis P'' determinat. Altera aequatio [94] relationem indicat virium P', P'', erga se invicem, quae a positione superficiei datae et a directione vis P'' dependet.

61. Si superficies data fuerit plana, perpendicularis ad planum

(xz), designemus litteris λ, μ, ν, angulos, quos illa faciat cum planis coordinatis (yz), (xz), (xy). Erit itaque $\cos\mu = \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$ $= \cos 90^\circ = o$; atque $\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} = \cos\lambda$; $\frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} = \cos\nu$. Quia vero $\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2 = 1$ erit quoque $\cos\lambda = \sin\nu$. Inde mutantur aequationes [93], [94] in eas:

$$-\sin\nu\cos(p'',y) = o$$
$$-P'\cos\lambda + P''(\sin\lambda\cos(p'',x) - \cos\lambda\cos(p'',z)) = o$$

formula prior dat aut $\sin\nu = o$; (ideoque $\nu = o$, in quo casu aperte planum datum in ipsum cadit planum (xy)); aut $\cos(p'',y) = o$, sive $(p'',y) = 90^\circ$. Necessario ergo erit, quo P'' cum gravitate sit in aequipondio, ut illa ad rectos angulos coordinatae y dirigatur. Tum vero est aperte $\cos(p'',x) = \sin(p'',z)$; formula secunda ergo in eam mutatur:

$$-P'\cos\lambda + P''(\sin\lambda\sin(p'',z) - \cos\lambda\cos(p'',z)) = o$$
$$\text{sive } -P'\cos\lambda - P''\cos(\lambda + (p'',z)) = o.$$

Tum si directio vis P'' fuerit perpendicularis directioni gravitatis, erit $(p'',z) = 90^\circ$, ergo $\cos(\lambda + (p'',z)) = -\sin\lambda$, unde provenit

$$P'\cos\lambda - P''\sin\lambda = o$$
$$\text{vel } \frac{P''}{P'} = \cot\lambda = tg\nu \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [95].$$

Si vero directio p'' fuerit parallela intersectioni superficiei datae et plani coordinati (xz), erit $(p'',z) = 180^\circ - \lambda$, quo fit

$$P'\cos\lambda - P'' = o;\ \text{sive } \frac{P''}{P'} = \cos\lambda = \sin\nu \ \ldots\ldots [96].$$

62. Superficies data supponatur esse sphaera, cujus radius $= r$. Origo coordinatarum sit sphaerae datae centrum. Erit inde ejus aequatio $u = o = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, e qua sequitur $du = xdx + ydy + zdz$, ergo $A = x$, $B = y$, $C = z$. Quibus valoribus substitutis formulae [93, 94] fiunt:

$$\left.\begin{aligned} o &= y\cos(p'',x) - x\cos(p'',y) \\ o &= -xP' + P''(z\cos(p'',x) - x\cos(p'',z)) \end{aligned}\right\} \ldots [97].$$

Jam si p'' fuerit perpendicularis directioni z gravitatis, erit $(p'',z) = 90^\circ$; $\cos(p'',z) = o$, itaque $\cos(p'',x) = \sin(p'',y)$. Sequitur ergo e formularum [97] priore:

$$\frac{x}{y} = tg\,(p'',y)$$

unde perspicuum est, ut aequipondium subsistere possit, vim P'' oportere esse directam secundum sphaerae radium.

E formularum altera nanciscimur

$$o = -xP' + P''z\sin(p'',y)$$

$$\text{ergo } \frac{P''}{P'} = \frac{x}{z\sin(p'',y)}.$$

Quod si p'' parallela sit axi x, erit $(p'',y) = 90^\circ$, ideoque

$$\frac{P''}{P'} = \frac{x}{z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [98].$$

Formulae [97...98] punctum mobile in parte convexa sphaerae moveri supponunt, si vero illud parti concavae inhaerere cogitamus, eligamus originem coordinatarum, quo superficies horizontem tangit puncto: et mutatur z tum in $r-z$, reliqua immutata manent.

63. Superficie data sphaeroidica, cujus tres axes sint: r', r'', r''', erit

$$u = o = \frac{x^2}{r'^2} + \frac{y^2}{r''^2} + \frac{z^2}{r'''^2} - 1$$

unde statim apparet, formulas [97...98] easdem ad hunc casum posse applicari modo sint posita $\frac{x}{r'^2}$, $\frac{y}{r''^2}$, $\frac{z}{r'''^2}$ loco x, y, z.

64. Sit superficies data parabolica, cujus aequatio

$$u = o = y^2 + z^2 - px$$

origine coordinatarum in ejus vertice locata. Erit itaque

$$du = 2ydy + 2zdz - pdx;$$

p = parametro. Habemus ergo in hoc casu $A = p$, $B = 2y$, $C = 2z$ unde formula [98] mutatur in eam:

$$\frac{P''}{P'} = \frac{\frac{p}{2}}{z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [99].$$

Sequitur hinc qualitas superficiei e parabola Apollonica ortae memorabilis, quod vis P'', quae gravitati aequipondium facit, huic sit aequalis, quando punctum mobile in linea plano (xy) perpendiculari supra focum parabolae fuerit collocatum.

65. Operae erit pretium, hac methodo generali pertractare problema quod a viro cel. Francoeur in libro: traité elem. de Mecanique etc. (4. edit. p. 118.) constructionis ope geometricae solutum invenimus.

Concernit illud instrumentum quoddam ad electricitatem metiendam adaptatum. In fili, quod altero fine suspensum est, altero fine pendet molecula. Filum dictum nec flexione, nec expansione vel contractione capax praesumitur. In eodem puncto, quo molecula gravitati soli obtemperans quiescit, affigatur corpusculum electricum, illam propellens per circulum cujus radius est filum. Molecula autem non nisi in uno plano rotari possit quod quidem pro plano (xz) eligamus. Vis electrica illam in linea recta propellit, quae videlicet erit chorda arcus a molecula vi illi obtemperante percursi. Supponamus, vim electricam esse in proportione inversa quadrati distantiae ipsius a puncto in quod protenditur. Quaestio est: quibusnam conditionibus existentibus vis electrica atque moleculae gravitas perventurae sint in aequipondii statum?

Eligamus pro origine coordinatarum illud punctum fixum, in quo filum est suspensum. Axis x sit perpendicularis directioni gravitatis z. Conditio data, quapropter molecula non nisi in circulo et quidem in plano (xz) moveri possit, aequationem praebet

$$u = o = x^2 + z^2 - r^2, \text{ ergo}$$
$$du = xdx + zdz, \text{ unde}$$
$$A = x,\ B = o,\ C = z.$$

Chorda arcus a molecula percursi, ubi aequipondium adest, sit $= c$; atque sint x, z coordinatae loci, ubi molecula ob aequipondium quiescit. P' sit pondus moleculae; P'': vis electrica, cujus directio p'' aperte erit $= c$. Inde vero habemus

$$\cos(p'',x) = \frac{x}{c};\ \cos(p'',y) = o;\ \cos(p'',z) = -\frac{r-z}{c}.$$

Quia vero gravitas P' secundum hypothesin in directione axis z agit, erit

$$\cos(p',z) = 1, \text{ ideoque } \cos(p',x) = o,\ \cos(p',y) = o.$$

Quibus valoribus in formula generali [91] substitutis, habemus:

$$o = -xP' + P''\left(\frac{xz}{c} + \frac{x(r-z)}{c}\right) = -xP' + \frac{xP''r}{c}; \text{ ideoque}$$

$$\frac{P''}{P'} = \frac{c}{r} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ [100].$$

Atqui P'' secundum hypothesin est $= \frac{f}{c^2}$, si virtutem ejus internam ponamus $= 1$ pro $c = \sqrt{f}$. Erit ergo

$$rf = P'c^3.$$

Unde apparet, pro eodem instrumento expansionem electricitatis esse in ratione directa cubi chordae arcui propriae, quem molecula percursa erit, quando aequipondium inter illam et gravitatem locum obtinet.

66. Idem instrumentum, quemadmodum illud cel. Coulomb adornavit, libra nominatur electrica, quae aliud non inelegans exemplum illius methodus applicationis offert.

Absit molecula, atque in circuli centro sit corpusculum aliquod elasticum cujus vis expansiva, P', filum in ea teneat positione, ut cum

axe z angulum, a, comprehendat. Vis electrica P'', ut supra dictum est, propellat fili alteram extremitatem atque angulum a in angulum $a+\varphi$ dilatare contendat, ubi φ erit quantitas variabilis a quantitate P'' dependens. Reliquis ut (65) positis, formula generalis erit

$$P'dp'+P''dp''=o.$$

Erit autem $p''=c$, atque $dp'=d\,.\,r(a+\varphi)=rd\varphi$. Quibus substitutis mutatur illa in

$$P'rd\varphi+P''dc=o.$$

Est vero aperte $c=\sqrt{(x^2+(r-z)^2)}=r\sqrt{\left(\frac{x^2}{r^2}+\left(\frac{r-z}{r}\right)^2\right)}$

$$=r\sqrt{(\sin^2(a+\varphi)+\text{sinvers}^2(a+\varphi))}$$

$$=r\sqrt{(\sin^2(a+\varphi)+(1-\cos(a+\varphi)^2))}=2r\sin\tfrac{1}{2}(a+\varphi).$$

Unde provenit $dc=rd\varphi\cos\frac{1}{2}(a+\varphi)$.

Quo substituto, formula $P'rd\varphi+P''dc=o$ mutatur in

$$P'rd\varphi+P''rd\varphi\cos\tfrac{1}{2}(a+\varphi)=o, \text{ itaque}$$

$$P'+P''\cos\tfrac{1}{2}(a+\varphi)=o, \text{ vel}$$

$$\frac{P''}{P'}=-\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(a+\varphi)}.$$

Unde, si, ut prius, $P''=\frac{f}{c^2}$; et P' fuerit $=k$, quando $a+\varphi=1$, atque P' in ratione directa anguli $(a+\varphi)$, ideoque $P'=k(a+\varphi)$, nullo negotio deducitur formula ista a cel. Biot data

$$f=\frac{8r^2k(a+\varphi)\sin\frac{1}{2}(a+\varphi)^3}{\sin(a+\varphi)}$$

67. *Problema*: Duo puncta gravia, quorum Pondera $=P', P''$, in extremitatibus fili, nulla expansione nec contractione capacis, in puncto quodam fixo atque volubili suspensi, sint, ad utramque partem, superficiebus figurae datae imposita, quibus inhaerendo libere ascendere et descendere possint: invenire aequipondii conditiones.

Solutio: Coordinatae locorum, quos puncta in statu aequipondii

occupant, sint x', y', z'; x'', y'', z''. Vires quibus eorum alterutrum filum versus se trahit sint Q', Q''.

Quiescente utroque aperte P', P'' sunt in aequipondio, igitur

$$P'dp' + P''dp'' = o$$

Oportet autem esse quoque Q', Q'' in aequipondio, quia ab illis non nisi directione differunt, unde habemus item

$$Q'dq' + Q''dq'' = o$$

q', q'' sunt nempe lineae rectae secundum quas vires Q', Q'' diriguntur. Sit ergo q' distantia puncti gravis P' a puncto circa quod filum volvitur fixo, atque q'' distantia similis alterius puncti P''. Palam erit tota longitudo fili $= q' + q''$, et quia illa secundum hypothesin constans est, erit $dq' + dq'' = o$. Sequitur inde esse $dq' = -dq''$, itaque $Q' = Q''$.

Aequationes superficierum datarum, quibus inhaerere puncta P', P'' supponuntur, sint

$$du = A'dx' + B'dy' + C'dz' = o$$

$$dv = A''dx'' + B''dy'' + C''dz'' = o.$$

Dabunt igitur formulae generales [91] ad problematis conditiones applicatae pro puncto P'

$$o = P'(B'\cos(p',x) - A'\cos(p',y)) + Q'(B'\cos(q',x) - A'\cos(q',y))$$

$$o = P'(C'\cos(p',x) - A'\cos(p',z)) + Q'(C'\cos(q',x) - A'\cos(q',z))$$

pro puncto P''

$$o = P''(B''\cos(p''x) - A''\cos(p'',y)) + Q''(B''\cos(q'',x) - A''\cos(q'',y))$$

$$o = P''(C''\cos(p'',x) - A''\cos(p'',z)) + Q''(C''\cos(q'',x) - A''\cos(q'',z)).$$

Ponamus, quod licet, gravitatem agere secundum directionem axis x, tum erunt

$$\cos(p',x) = o;\ \cos(p',y) = o;\ \cos(p',z) = 1;$$

$$\cos(p'',x) = o;\ \cos(p'',y) = o;\ \cos(p'',z) = 1.$$

Unde emergent: pro puncto P'

B'

$$B' \cos(q',x) - A' \cos(q',y) = o$$

$$-A'P' + Q'(C' \cos(q',x) - A' \cos(q',z)) = o$$

pro puncto P''

$$B'' \cos(q'',x) - A'' \cos(q'',y) = o$$

$$-A''P'' + Q''(C'' \cos(q'',x) - A'' \cos(q'',z)) = o$$

primae harum binarum aequationum positionem determinant fili; e secundis proveniunt

$$\frac{A'P'}{A''P''} = \frac{Q'(C' \cos(q',x) - A' \cos(q',z))}{Q''(C'' \cos(q'',x) - A'' \cos(q'',z))},$$

sive, quia $Q' = Q''$

$$\frac{P'}{P''} = \frac{A''(C' \cos(q',x) - A' \cos(q',z))}{A'(C'' \cos(q'',x) - A'' \cos(q'',z))}.$$

68. Si ambas fili partes in plano (xz) collocamus et e puncto fixo volubili demittamus lineam in plano (xy) perpendicularem, quae ergo inter ambas illas transibit, erit manifesto, quia vires Q', Q'' sursum tendunt,

$$\cos(q',z) = -\sin(q',x)$$

$$\cos(q'',z) = -\sin(q'',x).$$

Ideo $$\frac{P'}{P''} = \frac{A''}{A'} \cdot \frac{C' \cos(q',x) + A' \sin(q',x)}{C'' \cos(q'',x) + A'' \sin(q'',x)}.$$

69. Sint superficies datae planae, a coordinato plano (xz) ad rectos angulos intersectae, erit secundum (19)

$$\frac{A'}{\sqrt{(A'^2 + B'^2 + C'^2)}} = \cos(q',z) = \sin(q',x)$$

$$\frac{C'}{\sqrt{(A'^2 + B'^2 + C'^2)}} = \cos(q',x) = \sin(q',z).$$

Eodem modo

$$\frac{A''}{\sqrt{(A''^2 + B''^2 + C''^2}} = \cos(q'',z) = \sin(q'',x)$$

$$\frac{C''}{\sqrt{(A''^2 + B''^2 + C''^2}} = \cos(q'',x) = \sin(q'',z).$$

His vero substitutis mutatur formula supra (68) inventa in:

$$\frac{P'}{P''} = \frac{\sin(q'',x)}{\sin(q',x)} \cdot \frac{\sin(q',z)\cos(q',x) + \sin(q',x)\cos(q',z)}{\sin(q'',z)\cos(q'',x) + \sin(q'',x)\cos(q'',z)}$$

$$= \frac{\sin(q'',x)}{\sin(q',x)} \cdot \frac{\sin[(q',z)+(q',x)]}{\sin[(q'',z)+(q'',x)]}.$$

Est autem $(q',z)+(q',x) = 90^\circ$.

Ergo $$\frac{P'}{P''} = \frac{\sin(q'',x)}{\sin(q',x)}.$$

CAPUT VIII.

F U N I S.

70. *Funis* inflexibilis neque extensione vel contractione capax, nihil est aliud quam linea recta p, secundum quam vis quaedam P dirigitur. Adhibetur funis ad locum vis agentis commode transferendum. Funis autem *tensio* in aequipondii statu est quantitas vis in altera ejus extremitate trahentis, quae cum altera vi in altera extremitate in contrarium agente est in aequipondio.

Omnia igitur problemata, quae circa funis tensionem versantur, convenire debent cum illis de conditionibus aequipondii, quando plures vires in idem agunt punctum (Cap. III.).

71. Saepissime funis in trochleam applicatur. Quaestiones vero huc pertinentes, ad unam simplicissimam facile reducuntur:

Pondus P' in altera extremitatum funis pendet, qui in trochleae orbiculis modo solito circumvolutus est. Altera funis extremitas a vi P'' tenditur: invenire rationem $P' : P''$ in statu aequipondii.

Pondus P' omnes funis partes non circumvolutas sibi invicem reddit parallelas.

Supponatur numerus orbiculorum esse $= n$; longitudo funis $= l$. Quo orbiculus quivis mobilis ascendendo percurrat spatium dl, manifesto $2dl$ partes funis devolvi oportet, ideoque vim P'' descendere per spatium $2dl$, ut funis tensio eadem maneat. Si ergo P' ascendat per dl, quemcunque orbiculorum mobilium, quorum numerus n est, per dl ascendat necesse est. Inde sequitur pondus P'' esse descensurum per $2ndl$.

Conditio itaque aequipondii, tensione funis non mutari supposita, $P'dp' + P''dp'' = o$, quia $dp' = dl$; $dp'' = 2ndl$, erit

$$P'dl + 2nP''dl = o$$

unde statim prodit

$$\frac{P'}{P''} = -2n.$$

Hinc facile erit theoriam funis persequi, quod vero alienum esset a dissertationis hujus proposito.

EX OFFICINA A. G. SCHADII.